II
Spazi vettoriali ed applicazioni lineari

Nel capitolo precedente abbiamo visto come assumano un ruolo importante nello studio dello Spazio Euclideo la sua struttura di spazio affine e quindi di spazio vettoriale, una volta che si sia fissata un'origine. Inoltre, abbiamo visto come le trasformazioni "rigide" dello spazio euclideo ovvero, le applicazioni biunivoche che conservino le reciproche distanze tra i punti, siano particolari affinità e quindi siano legate a particolari applicazioni lineari tra i vettori dello spazio.

In questo capitolo vogliamo approfondire la conoscenza degli spazi vettoriali e delle applicazioni lineari in una situazione un po' più generale, che non privilegi gli scalari reali, anche in previsione di estendere gli enti che abbiamo conosciuto nel capitolo precedente dal corpo reale a quello dei numeri complessi.

1. Spazi vettoriali.

In questa sezione vogliamo formalizzare tramite una serie di definizioni precise alcune osservazioni sui vettori geometrici fatte nel capitolo precedente. In tal modo delineeremo la struttura e le proprietà fondamentali degli spazi vettoriali e vedremo che la stessa struttura algebrica astratta è condivisa anche da altri oggetti matematici, all'apparenza molto diversi dai vettori geometrici.

1.1 Definizione. Sia C un corpo. Uno *spazio vettoriale* su C è un insieme V, dotato di due operazioni

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{e} \qquad \cdot : C \times V \to V$$

soddisfacenti alle seguenti proprietà:

$$\begin{array}{lcl}
u + (v + w) = (u + v) + w & & \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \\
u + v = v + u & & (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\
\text{esiste } 0_V \in V \text{ tale che } 0_V + v = v = v + 0_V \text{ per ogni } v \in V & \text{e} & \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \\
\text{dato } v \in V \text{ esiste } -v \in V \text{ tale che } v + (-v) = 0_V = (-v) + v & & 1v = v
\end{array}$$

qualunque siano u, v, w in V ed α, β in C.

Oltre ai vettori geometrici, ci sono molti altri esempi di spazi vettoriali.

1.2 Esempi. (a). Sia C un corpo qualsiasi e si consideri l'insieme C^n delle n-uple di elementi di C, ovvero

$$C^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \in C \right\}.$$

L'insieme C^n diventa un C-spazio vettoriale ponendo le operazioni di somma e prodotto definite da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad c \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

qualunque siano i vettori $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right) \in C^n$ e lo scalare $c \in C$.

Quando $C = \mathbb{R}$ abbiamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ che abbiamo descritto nel capitolo precedente. Quanto diremo in questo capitolo, varrà quindi per tale spazio.

(b). L'insieme dei polinomi a coefficienti reali $\mathbb{R}[X]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per una costante. In particolare, ogni polinomio si scrive (in modo unico) come somma di multipli di alcuni polinomi 'fondamentali', quali $1, X, X^2, X^3, \dots$. Più in generale, dato un corpo C, i polinomi a coefficienti in C, formano uno spazio vettoriale su C, che indichiamo con $C[X]$.

(c). L'insieme $\mathscr{T}$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che soddisfano alla condizione $f'' + f = 0$[(†)]. È immediato dedurre dalle ben note proprietà delle derivate di somme e prodotti che $\mathscr{T}$ è uno spazio vettoriale reale. Cerchiamo di utilizzare qualche facile argomento del calcolo per descrivere un po' più in dettaglio gli elementi di $\mathscr{T}$. Per prima cosa, osserviamo che a questo insieme appartengono tutte le funzioni del tipo $f(x) = a\cos x + b\sin x$, ove a e b sono due qualsiasi numeri reali ed, in particolare, si ha $f(0) = a$ ed $f'(0) = b$. Vogliamo vedere che tutti gli elementi di $\mathscr{T}$ sono di questo tipo e quindi, data $f(x) \in \mathscr{T}$, consideriamo le due costanti $f(0) = a$ ed $f'(0) = b$ e sia $g(x) = a\cos x + b\sin x$. La tesi è che la differenza $\phi(x) = f(x) - g(x) \in \mathscr{T}$ è la funzione identicamente nulla; infatti considerando la funzione $\psi(x) = \phi^2(x) + \phi'^2(x)$, si ha $\psi'(x) = 2\phi'(x)[\phi(x) + \phi''(x)] = 0$, qualunque sia x e quindi $\psi(x)$ è una costante e inoltre $\psi(0) = \phi^2(0) + \phi'^2(0) = 0$, da cui si deduce che $\psi(x)$ è la funzione identicamente nulla. Poichè, nei numeri reali, la somma di due quadrati è nulla se, e solo se, sono nulli entrambo gli addendi, si conclude che anche $\phi(x)$ è la funzione identicamente nulla.

Possiamo quindi concludere questo esempio osservando che $\mathscr{T}$ è uno spazio vettoriale e che l'applicazione $\mathscr{T} \to \mathbb{R}^2$, definita da $f(x) \mapsto (f(0), f'(0))$, è una corrispondenza biunivoca che "rispetta le operazioni".

Esercizio 1.1. Si deducano dagli assiomi di spazio vettoriale (cf. *Definizione II.1.1*) le seguenti relazioni:

$$(a)\ 0 \cdot v = 0_V; \qquad (b)\ \alpha \cdot 0_V = 0_V; \qquad (c)\ (-1) \cdot v = -v;$$

qualunque siano $v \in V$ ed $\alpha \in C$. □

Esercizio 1.2. Si consideri la semiretta $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, e si verifichi che tale insieme ha una struttura di spazio vettoriale reale, ove si prenda come 'somma' di due vettori $x, y \in (0, +\infty)$ il loro prodotto in quanto numeri reali e come 'moltiplicazione' del vettore $x \in (0, +\infty)$ per lo scalare $c \in \mathbb{R}$ il numero reale x^c. □

Esercizio 1.3. Si consideri l'insieme $Q = \mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite ponendo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qualunque siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si mostri che Q soddisfa a tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale reale, ad eccezione di uno (quale?); quindi Q NON è uno spazio vettoriale. □

Dato uno spazio vettoriale V sul corpo C, vogliamo considerare i sottoinsiemi (non vuoti) di V che sono a loro volta degli spazi vettoriali sullo stesso C; tali sottoinsiemi sono i 'sottospazi' di V.

1.3 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C. Un sottoinsieme non vuoto W di V è un *sottospazio vettoriale* di V se è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari; ovvero

$$u, w \in W,\ \alpha, \beta \in C \ \Rightarrow\ \alpha u + \beta w \in W.$$

1.4 Esempi. Nel capitolo precedente abbiamo visto diversi esempi di sottspazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che possono essere tenuti in considerazione anche in questo ambito. Diamo quindi qualche esempio di natura diversa.

(a). Se V è un qualunque spazio vettoriale, il sottoinsieme $\{0\}$ è un sottospazio di V che indicheremo con il simbolo (0). Analogamente, anche V è un sottospazio di sé stesso. Chiameremo *sottospazi banali* questi due sottospazi di V.

(†) È sottointeso che, affinché la condizione che definisce $\mathscr{T}$ abbia senso, le funzioni in questione si intendono derivabili almeno due volte (e quindi un numero qualsiasi di volte).

(b). Dato uno spazio vettoriale V su C, ed un suo vettore $v \neq 0$, si consideri il sottoinsieme

$$\langle v \rangle = \{\, \alpha v \mid \alpha \in C \,\}.$$

È facile dedurre dalle definizioni di spazio vettoriale ($(\alpha + \beta v) = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$) che si tratta di un sottospazio. In particolare, osserviamo che nello spazio dei vettori geometrici il sottospazio $\langle v \rangle$ si identifica con la retta per l'origine parallela al vettore v.

(c). Si indichi con $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabili k-volte e con k-esima derivata continua, ove $k = 1, 2, 3, \dots$; inoltre, siano $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni derivabili un numero qualsiasi di volte. È facile verificare che tutti questi insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e che tutti sono sottospazi di $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. In particolare, si ha

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 0} \mathscr{C}^k(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^k(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).$$

Esercizio 1.4. Sia $\mathscr{F}$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e si consideri il sottoinsieme

$$L = \{\, \log_a(x) \mid 0 < a \neq 1 \,\} \cup \{0\}.$$

Si mostri che L è un sottospazio (di dimensione 1) di $\mathscr{F}$. □

1.5 Osservazione. *Siano V uno spazio vettoriale su C ed U e W due suoi sottospazi. Allora $U \cap W$ è un sottospazio di V. Più in generale, data una qualsiasi famiglia di sottospazi di V, la sua intersezione è ancora un sottospazio di V.*

dim. Dati $u, w \in U \cap W$ ed $\alpha \in C$, allora $u - w$ ed αu, appartengono sia ad U che a W perchè questi sono entrambi sottospazi. L'argomento si può ripetere pari pari per una famiglia qualsiasi di sottospazi. **CVD** □

Se l'intersezione di due (o più) sottospazi vettoriali è ancora uno sottospazio vettoriale, *non è più vero, in generale, che l'unione di due sottospazi sia ancora un sottospazio*. Ad esempio, l'unione dei due sottospazi $r_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed $r_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ contiene i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ma la loro somma $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non appartiene all'unione $r_1 \cup r_2$, perchè non è un multiplo di nessuno dei due vettori v_1 e v_2.

Introduciamo quindi un nuovo concetto, quello di sottospazio generato da un insieme.

1.6 Definizione. Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Si chiama *sottospazio generato* da S il minimo sottospazio $\langle S \rangle$, contenente il sottoinsieme S, ovvero l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono S.

Possiamo descrivere in modo esplicito gli elementi del sottospazio generato da un sottoinsieme S. Infatti, se $\emptyset \neq S \subseteq V$, si ha

$$\langle S \rangle = \{\, \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in C,\ s_1, \dots, s_k \in S,\ k \in \mathbb{N} \,\}. \tag{1.7}$$

Infatti, è chiaro che ciascuno degli elementi $\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$ è contenuto in ogni sottospazio contenente S, dato che i sottospazi sono chiusi per combinazioni lineari. Inoltre, si verifica direttamente che l'insieme descritto nella formula (II.1.7) è un sottospazio di V.

Grazie alla nozione di sottospazio generato, possiamo definire un'operazione tra sottospazi di uno spazio vettoriale che può essere pensata come l'analogo dell'unione tra sottoinsiemi.

1.8 Definizione. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Si chiama *somma* di U e W il sottospazio $U + W = \langle U \cup W \rangle$. Se, inoltre $U \cap W = \langle 0 \rangle$, diremo che la somma dei due sottospazi è *diretta* e scriveremo $U \oplus W$ in luogo di $U + W$.

La definizione precedente si generalizza a famiglie qualsiasi di sottospazi.

*Esercizio 1.5. Il lettore verifichi servendosi della sola *Definizione II.1.6* che $\langle \emptyset \rangle = \langle 0 \rangle$. □

Esercizio 1.6. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Si mostri che

$$U + W = \{\, u + w \mid u \in U,\ w \in W \,\}.$$

(Ciò giustifica il nome di *somma* dato a questo sottospazio.) □

Esercizio 1.7. Si mostri che in $\mathbb{Q}^4$ si ha

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, x_2 = 0 \right\}$$

e si dica se la somma è diretta. □

Esercizio 1.8. Sia $P = \{\, f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 4 \,\}$.
(a) Si verifichi che P è un sottospazio di $\mathbb{R}[X]$ e $P = \langle 1, X, X^2, X^3, X^4 \rangle$.
(b) Si mostri che i sottoinsiemi

$$S = \{\, f(X) \in P \mid f(X) = f(1-X) \,\}, \qquad \text{ed} \qquad A = \{\, f(X) \in P \mid f(X) = -f(1-X) \,\}$$

sono sottospazi di P e si determini per ciascuno di essi un insieme di generatori.
(c) Si mostri che $P = S \oplus A$. □

Vogliamo mettere in evidenza alcuni particolari sottoinsiemi di uno spazio vettoriale.

1.9 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su C. Un sottoinsieme non vuoto S di V si dice *formato da vettori linearmente indipendenti* (o, più brevemente, *indipendente*) se, dati comunque dei vettori $v_1, \dots, v_r$ di S, $a_1v_1 + \dots + a_rv_r = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_r = 0$. Ovvero se *l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione di elementi di S sia quello di prendere tutti i coefficienti uguali a zero.*

Dei vettori che non siano linearmente indipendenti si diranno *linearmente dipendenti*.

Esercizio 1.9. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C. Si dimostri che
(a) Un vettore v è linearmente indipendente se, e solo se, $v \neq 0$.
(b) Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se, e solo se, non sono proporzionali.
(c) I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, nessuno di questi appartiene al sottospazio generato dai precedenti, ovvero se, e solo se, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k \rangle$. □

1.10 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su C. Una *base* di V è un insieme di generatori linearmente indipendenti dello spazio V.

La seguente osservazione mette in luce l'importanza delle basi tra tutti i possibili insiemi di generatori.

1.11 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale su C e $\mathscr{B}$ una sua base. Allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di elementi di $\mathscr{B}$.*

dim. Poichè $V = \langle \mathscr{B} \rangle$, discende dalla *Definizione II.1.6* che ogni vettore di V si scrive come combinazione di un numero finito di elementi della base $\mathscr{B}$. Inoltre, se il vettore $v \in V$ si scrivesse in due modi come combinazione di elementi di $\mathscr{B}$, allora si avrebbe $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$, ove $v_1, \dots, v_n \in \mathscr{B}$ ed $a_1, \dots, a_n, c_1 \dots, c_n$ sono in C. Se ne deduce che $\mathbf{0} = v - v = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_n - c_n)v_n$

e quindi che $a_1 - c_1 = \cdots = a_n - c_n = 0$, perchè gli elementi di $\mathscr{B}$ sono linearmente indipendenti. Quindi i coefficienti dei vettori di base necessari per scrivere v coincidono a due a due. **CVD** $\square$

Esercizio 1.10. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V. Si mostri che, per ogni intero $k = 1, \dots, n-1$, si ha $V = \langle v_1, \dots, v_k\rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n\rangle$. $\square$

Il risultato fondamentale sulla struttura degli spazi vettoriali asserisce che *ogni spazio vettoriale ammette una base* e che *ogni base di un dato spazio ha "lo stesso numero di elementi"*. L'ultima frase è messa tra virgolette perchè, se può essere evidente che cosa voglia dire che due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi, la cosa non è così ovvia per gli insiemi infiniti[†]. Non vogliamo discutere in dettaglio gli strumenti matematici necessari per trattare il problema nella sua forma generale e ci limiteremo solo al caso in cui gli spazi vettoriali ammettano un insieme finito di generatori e quindi, come vedremo, le basi abbiano solo un numero finito di elementi e daremo una dimostrazione del teorema fondamentale per gli spazi vettoriali finitamente generati.

1.12 Definizione. Uno spazio vettoriale V su C si dice *finitamente generato* (o *di tipo finito*) se esiste un insieme finito di generatori per V.

Dimostreremo quindi il seguente Teorema, il cui enunciato –lo ripetiamo– resta valido anche senza l'ipotesi che lo spazio sia finitamente generato su C.

1.13 Teorema. [struttura degli spazi vettoriali] *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul corpo C. Allora esiste una base per V e due diverse basi di V hanno lo stesso numero di elementi.*

La dimostrazione discenderà dal seguente fatto

1.14 Lemma. [Lemma di scambio] *Siano $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori per uno spazio vettoriale V su C e sia $C = \{w_1, \dots, w_r\}$ un insieme formato da vettori linearmente indipendenti di V; allora $r \leq n$.*

dim. Si consideri l'insieme $A' = \{w_1, v_1, \dots, v_n\}$. Poichè $V = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ il vettore w_1 si scrive come combinazione lineare dei generatori, ovvero esistono delle costanti $a_1, \dots, a_n$ tali che $w_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Poichè $w_1 \neq \mathbf{0}$, tali costanti non sono tutte nulle e, a meno di scambiare l'ordine dei vettori di A, possiamo supporre che sia diverso da zero il coefficiente a_1 del vettore v_1. Se ne deduce che

$$v_1 = a_1^{-1}w_1 - a_1^{-1}a_2v_2 - \cdots - a_1^{-1}a_nv_n \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n\rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle = V.$$

Dunque l'insieme $A_1 = \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ è ancora un insieme di generatori di V e possiamo considerare l'insieme $A'' = \{w_1, w_2, v_2, \dots, v_n\}$. Ragionando come sopra, possiamo affermare che esistono delle costanti $b_1, \dots, b_n$ tali che $w_2 = b_1w_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$. Inoltre, poichè w_1, w_2 sono linearmente indipendenti, i coefficienti di $v_2, \dots, v_n$ non sono tutti nulli e quindi, a meno di scambiare l'ordine dei vettori, possiamo supporre che sia diverso da zero il coefficiente b_2 del vettore v_2. Si conclude così che

$$v_2 \in \langle w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\rangle = \langle w_1, v_2, \dots, v_n\rangle = V.$$

Dunque procedendo ancora in tal modo possiamo sostituire tutti gli r vettori di B ad altrettanti vettori di A ed avere ancora un insieme di generatori di V. Ciò significa esattamente che A non può avere un numero di elementi minore di B. **CVD** $\square$

[†] In generale, si dice che due insiemi A e B hanno *la stessa cardinalità* se esiste una applicazione biiettiva $f : A \to B$. È chiaro che, per due insiemi finiti, avere la stessa cardinalità significa esattamente avere lo stesso numero di elementi e quindi che la definizione generalizza la nozione che ci interessa, ma mettiamo in guardia il lettore dalle facili generalizzazioni, infatti un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio (anzi, questa può essere presa come la definizione di insieme infinito), come si vede facilmente considerando i numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ed i numeri pari $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$

Possiamo quindi andare alla dimostrazione del teorema di struttura.

dim. [del *Teorema II.1.13*] Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori per V. Se i generatori sono linearmente indipendenti, allora si tratta di una base ed il primo asserto è verificato, altrimenti, uno dei vettori dati è combinazione lineare dei rimanenti, sia v_k, e quindi i vettori $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono ancora un insieme di generatori per V. Di nuovo, se questi generatori sono linearmente indipendenti, allora si tratta di una base, altrimenti uno di questi è combinazione lineare dei rimanenti e si può ottenere ancora un insieme di generatori di V, con un vettore in meno. Se questi formano una base il processo è terminato, altrimenti si continua ad eliminare vettori ottenendo insiemi di generatori con un numero minore di elementi. Dopo un numero finito di passi ci si deve arrestare ed ottenere così una base di V.

La seconda affermazione è conseguenza del Lemma di Scambio. Infatti, in base a tale risultato, poichè V ha un numero finito di generatori, allora ogni sua base ha un numero finito di elementi. Inoltre, se $v_1, \dots, v_n$ e $w_1, \dots, w_m$ sono due basi di V, allora deve aversi $m \leq n$, perchè i vettori $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti ed i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V. D'altra parte, è anche vero che i vettori $w_1, \dots, w_m$ sono generatori di V ed i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e quindi si ha anche $n \leq m$, da cui si conclude che $n = m$ ed il teorema è completamente dimostrato. **CVD** □

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

1.15 Definizione. Sia V un spazio vettoriale (finitamente generato)sul campo C. Si chiama *dimensione* di V su C il numero di elementi di una base di V su C. In particolare, si scriverà $\dim_C V$ per indicare la dimensione dello spazio V.

*Esercizio 1.11. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Si usi il Lemma di Scambio (cf. *Lemma II.1.14*) per dimostrare che ogni sottospazio U di V ha dimensione minore o uguale ad n e che $\dim_C U = n$ se, e solo se, $U = V$. □

*Esercizio 1.12. [Relazioni di Grassmann] Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C ed U e W due suoi sottospazi. Si mostri che

$$\boxed{\dim_C(U + W) = \dim_C U + \dim_C W - dim_C(U \cap W)}$$

□

Esercizio 1.13. Sia fissato un polinomio a coefficienti complessi

$$Q(X) = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r},$$

ove $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono le radici di $Q(X)$, a due a due distinte, $c \in \mathbb{C}$ ed $m_1 + \dots + m_r = n = \deg Q > 0$. Si verifichi che l'insieme $V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} \,\middle|\, P(X) \in \mathbb{C}[X],\ \deg P < \deg Q \right\}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione n.

Si mostri che l'insieme $\left\{ \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} \,\middle|\, i = 1, \dots, r,\ j = 1, \dots, m_i \right\}$ è una base di V_Q. □

Esercizio 1.14. Dati due sottoinsiemi di un insieme finito, S_1 ed S_2, vale la formula $\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$ e vi è un analogo per le dimensioni dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita, nelle Relazioni di Grassmann $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Dati tre sottoinsiemi, si ha

$$\begin{aligned} \#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = &\#S_1 + \#S_2 + \#S_3 - \#(S_1 \cap S_2) - \#(S_1 \cap S_3) - \\ &- \#(S_2 \cap S_3) + \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3); \end{aligned}$$

è vero o falso che vale l'analogo per i sottospazi, ovvero che

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) = &\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \ ? \end{aligned}$$

□

2. Applicazioni lineari e Matrici

Ripetiamo, nel contesto degli spazi vettoriali, la definizione di applicazione lineare data alla fine del capitolo precedente.

2.1 Definizione. iano V e W due spazi vettoriali sul campo C, un'applicazione $\phi : V \to W$ si dice *applicazione lineare* o *omomorfismo di spazi vettoriali* se, per ogni coppia di vettori v, v' in V ed ogni coppia di scalari α, β in C, si ha $\phi(\alpha v + \beta v') = \alpha\phi(v) + \beta\phi(v')$.

Si dice *isomorfismo* un'applicazione lineare biiettiva.

L'insieme di tutte le applicazioni lineari tra due C-spazi vettoriali V e W, si indica con il simbolo $\mathrm{Hom}_C(V, W)$.

2.2 Esempi. (a). Si considerino nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 - x_3 = 0 \right\}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ associa quell'unico vettore $\pi(\mathbf{x}) \in U$, tale che $\mathbf{x} = \pi(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{v}$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Questa applicazione si chiama la *proiezione su U, parallela al vettore* $\mathbf{v}$ ed è un'applicazione lineare.

Per verificarlo, calcoliamo in modo preciso le componenti di $\pi(\mathbf{x})$ in funzione delle componenti di $\mathbf{x}$. Per prima cosa, dobbiamo determinare una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ di modo che $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1-2\alpha \\ x_2+\alpha \\ x_3-\alpha \end{pmatrix}$ appartenga ad U, ovvero

$$(x_1 - 2\alpha) - (x_3 - \alpha) = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha = x_1 - x_3;$$

da cui si conclude che $\pi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1+2x_3) \\ x_1+x_2-x_3 \\ -x_1+2x_3 \end{pmatrix}$. Poiché le componenti di $\pi(\mathbf{x})$ sono funzioni lineari (polinomi di grado 1) delle componenti del vettore $\mathbf{x}$, è immediato verificare che π è un'applicazione lineare.

(b). Sia $C[X]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti nel corpo C e si consideri l'applicazione $P(x) \mapsto xP(x)$, che ad ogni polinomio $P(x)$ associa il suo prodotto con x. È facile verificare che si tratta di un'applicazione lineare. Analogamente, si può verificare che è lineare l'applicazione che associa al polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, la sua derivata rispetto ad x, ovvero $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.

(c). Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ e si osservi che questo insieme può essere considerato uno spazio vettoriale sia sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (su cui ha dimensione 2, essendo $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$,$\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, una sua base) che sul corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, limitando la moltiplicazione per scalari ai soli numeri reali. In particolare, sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi $\mathbb{C}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, essendo $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, una sua base, ma sul corpo dei numeri reali, $\mathbb{C}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 4, come si può verificare considerando la base $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, $i\mathbf{e}_1 = \binom{i}{0}$, $i\mathbf{e}_2 = \binom{0}{i}$, ove i indica, come di consueto una radice quadrata di -1. Su $\mathbb{C}^2$ l'applicazione $\gamma : \binom{z_0}{z_1} \mapsto \binom{\bar{z}_0}{\bar{z}_1}$ che applica la coniugazione complessa alle componenti dei vettori di $\mathbb{C}^2$, è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, ma non è $\mathbb{C}$-lineare, come si vede immediatamente, osservando che

$$\gamma(i\binom{z_0}{z_1}) = \begin{pmatrix} \overline{iz_0} \\ \overline{iz_1} \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = -i\gamma(\binom{z_0}{z_1}).$$

Osserviamo quindi che la naturale relazione di inclusione tra gli insiemi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ è un'inclusione stretta.

(d). Dato uno spazio vettoriale V sul corpo C, scegliere una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, corrisponde a dare un isomorfismo $\phi_{\mathcal{V}} : C^n \to V$, definito dalla posizione $\phi_{\mathcal{V}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Infatti, questa applicazione è chiaramente lineare ed il fatto che ogni vettore di V si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{V}$, significa precisamente che ogni vettore di V è immagine di uno, ed un solo, elemento di C^n.

Esercizio 2.1. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e sia fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Si mostri che, scelti comunque n vettori $w_1, \dots, w_n$ di W esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $\phi(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$. $\square$

Esercizio 2.2. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ e la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Detta $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda i vettori della base canonica ordinatamente sui vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

si scrivano esplicitamente le componenti dell'immagine di un generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. □

Esercizio 2.3. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e sia fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Data un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ si verifichi che
(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono linearmente indiperndenti in W;
(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono dei generatori di W;
(c) ϕ è un isomorfismo se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono una base W. □

2.3 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C. Ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, possiamo associare due sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned} &\text{il } \textit{nucleo} \text{ di } \phi \qquad && \ker\phi = \{\, v \in V \mid \phi(v) = 0 \,\}; \\ &\text{l'}\textit{immagine} \text{ di } \phi \qquad && \operatorname{im}\phi = \{\, \phi(v) \in W \mid v \in V \,\}. \end{aligned}$$

Si chiamano rispettivamente *rango* e *nullità* dell'applicazione lineare ϕ le dimensioni dell'immagine e del nucleo. In simboli $\mathrm{rk}_\phi = \dim_C \operatorname{im}\phi$ e ${}_\phi = \dim_C \ker\phi$.

2.4 Osservazione. *Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*
(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, $\ker\phi = \langle 0 \rangle$;
(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, $\operatorname{im}\phi = W$.

dim. (a). Se ϕ è iniettiva, allora solo un vettore può avere come immagine il vettore nullo e quindi si ha necessariamente $\ker\phi = \langle 0 \rangle$. Viceversa, se ϕ non fosse iniettiva, allora esisterebbero due vettori distinti $v, v' \in V$ con $\phi(v) = \phi(v')$ e quindi $\phi(v - v') = \phi(v) - \phi(v') = 0$; ovvero si avrebbe $0 \neq v - v' \in \ker\phi$.
(b). È ovvia. **CVD** □

Esercizio 2.4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle|\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Indicata con $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione su W parallelamente al vettore $\mathbf{v}$, si determinino nucleo ed immagine di questa applicazione lineare. □

2.5 Proposizione. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim_C \ker\phi + \dim_C \operatorname{im}\phi = \dim_C V.$$

dim. Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker\phi$ (nessun vettore se $\ker\phi = \langle 0 \rangle$), e completiamo questi vettori ad una base di V: $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Vogliamo mostrare che i vettori $\phi(v_{k+1}), \dots, \phi(v_n)$ sono una base di $\operatorname{im}\phi$. Infatti, dato un vettore $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$ di V, si ha $\phi(v) = \alpha_{k+1}\phi(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n \phi(v_n)$ e quindi i vettori $\phi(v_{k+1}), \dots, \phi(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im}\phi$. D'altra parte, se $\beta_{k+1}\phi(v_{k+1}) + \cdots + \beta_n \phi(v_n) = 0$, allora il vettore $\beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n$ appartiene a $\ker\phi$ e quindi, deve aversi necessariamente $\beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n = 0$, ovvero $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$.
CVD □

Lasciamo al lettore il compito di dedurre dalla Proposizione qui sopra delle condizioni necessarie sulle dimensioni degli spazi coinvolti per l'esistenza di applicazioni lineari iniettive (risp. suriettive, risp. biiettive) tra questi spazi.

*Esercizio 2.5. Una *sequenza esatta* di omomorfismi di spazi vettoriali è una collezione di applicazioni lineari

$$V_0 \xrightarrow{\alpha_0} V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} V_{n+1}$$

tale che, per ogni coppia di omomorfismi consecutivi, α_i ed α_{i+1}, si abbia $\operatorname{im}\alpha_i = \ker\alpha_{i+1}$.

(a) Si mostri che, per una *sequenza esatta breve*,

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0$$

si ha $\dim_C V = \dim_C U + \dim_C W$.

(b) Più in generale, si mostri che, per una *sequenza esatta* del tipo,

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

si ha $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \dim_C V_j = 0$. □

*Esercizio 2.6. Sia C un corpo e consideriamo il sottospazio M_k^n di $C[x_1, \dots, x_n]$, generato da tutti i monomi di grado k, ovvero

$$M_k^n = \langle\, x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \mid r_1 + \cdots + r_n = k \,\rangle\,.$$

(a) Si mostri che, qualunque sia l'intero n, si ha $\dim_C M_n^1 = 1$ e $\dim_C M_1^n = n$.

(b) Fissati gli interi n e k, si mostri che si ha una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow M_k^{n+1} \xrightarrow{\alpha} M_{k+1}^{n+1} \xrightarrow{\beta} M_{k+1}^n \longrightarrow 0$$

ove $\alpha(m) = x_{n+1}m$, per ogni $m \in M_k^{n+1}$, e $\beta(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} x_{n+1}^{r_{n+1}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{n+1} > 0 \\ x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} & \text{altrimenti} \end{cases}$.

(c) Servendosi delle osservazioni precedenti, si dimostri per induzione che $\dim_C M_k^n = \binom{n+k-1}{k}$. □

Esercizio 2.7. Si considerino gli spazi vettoriali U, V, W, Z, di dimensione finita sul corpo C, e le applicazioni lineari

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} Z.$$

Si mostri che

(a) $\operatorname{rk}(\gamma\circ\beta) + \operatorname{rk}(\beta\circ\alpha) \le \operatorname{rk}\beta + \operatorname{rk}(\gamma\circ\beta\circ\alpha)$;

(b) $\operatorname{rk}\alpha + \operatorname{rk}\beta - \dim V \le \operatorname{rk}(\beta\circ\alpha) \le \min\{\operatorname{rk}\alpha, \operatorname{rk}\beta\}$. □

Introduciamo ora qualche nuova definizione.

2.6 Definizione. Fissati due interi positivi m ed n, chiameremo *matrice* di ordine $m \times n$, ad elementi nel corpo C, ogni tabella di scalari del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}},$$

ove a_{ij} indica l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna della tabella.

Indicheremo con $M_{m\times n}(C)$ l'insieme di tutte le matrici di ordine $m \times n$, ad elementi nel corpo C, che formano uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto per scalari, definite elemento per elemento, ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un C spazio vettoriale, isomorfo a C^{mn}, ed indicheremo con $\{\, \varepsilon(ij) \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \,\}$, la base canonica di $M_{m\times n}(C)$, ove $\varepsilon(ij)$ è la matrice che ha tutte le entrate uguali a 0, ad eccezione di quella di posto (i, j), che è uguale ad 1.

Il motivo per cui ci interessiamo agli spazi vettoriali di matrici è che queste ultime sono uno strumento per rappresentare le applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

2.7 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi dei rispettivi spazi. Data un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, si chiama *matrice* di ϕ, rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, la matrice avente ordinatamente come colonne le componenti dei vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W; ovvero, se

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned} \qquad \text{la matrice è} \qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.8 Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la proiezione sul piano $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$, parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\pi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1+6x_2-2x_3 \\ -2x_1+4x_2-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\pi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora i vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $u_3 = v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed osserviamo che si tratta di tre vettori linearmente indipendenti e quindi di una base $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e quindi si conclude facilmente che $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = \mathbf{0}$ ovvero che la matrice di π rispetto a questa nuova base di $\mathbb{R}^3$ è

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricordando le coordinate dei vettori della base $\mathcal{U}$ rispetto alla base canonica, possiamo scrivere anche la matrice di π rispetto alla base $\mathcal{U}$ nello spazio di partenza ed alla base canonica $\mathcal{E}$ nello spazio di arrivo, ovvero

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi dei rispettivi spazi. La matrice dell'applicazione lineare $\phi : V \to W$ può essere usata per calcolare le coordinate delle immagini dei vettori di V, rispetto alle basi date. Sia

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

e consideriamo un vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Allora, l'immagine di v è il vettore

$$\phi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1\phi(v_1) + \cdots + x_n\phi(v_n);$$

ovvero, indicando in colonna le componenti dei vettori di V rispetto alla base $\mathcal{V}$ e le componenti dei vettori di W rispetto alla base $\mathcal{W}$, si ha che le coordinate del vettore $\phi(v)$ rispetto alla base $\mathcal{W}$ sono il prodotto della matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{V}$, ovvero

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.} \tag{2.9}$$

Esercizio 2.8. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.

(a) Si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'applicazione lineare $\phi: V \to W$, così definita:

$$\begin{array}{cc} \phi(v_1) = w_1 - w_2, & \phi(v_2) = 2w_2 - 6w_3, \\ \phi(v_3) = -2w_1 + 2w_2, & \phi(v_4) = w_2 - 3w_3 \end{array}.$$

(b) Si determinino le dimensioni dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ e si scrivano delle basi per tali sottospazi.

(c) È vero o falso che $w_1 + w_2 + w_3 \in \operatorname{im}\phi$? □

Esercizio 2.9. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, gli endomorfismi ϕ_λ di V definiti dalle condizioni

$$\phi_\lambda(v_1) = (\lambda - 1)v_1 + 2v_2 - (\lambda + 1)v_3 \quad \phi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3 \quad \phi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda + 2)v_3$$

(a) Si determinino, al variare di λ le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ_λ.

(b) Si dica per quali valori di λ il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$ appartiene all'immagine di ϕ_λ. □

Esercizio 2.10. Si indichi con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $V = \mathbb{C}^4$ e si considerino i seguenti sottospazi (complessi) di V

$$E = \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{e} \quad D = \langle e_3 - (1 + 3i)e_1, e_4 - 2ie_2 \rangle .$$

(a) Si dimostri che $V = E \oplus D$.

(b) Si indichino con $\pi : E \oplus D \to E$ la proiezione canonica e con L il sottospazio reale di V generato dalla base canonica. Si dimostri che la restrizione di π ad L è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

(c) Si osservi che, tramite l'isomorfismo del punto precedente, la moltiplicazione per i dei vettori del sottospazio E diviene un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare dello spazio L in sé. Si scriva la matrice J di tale endomorfismo rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L. □

***Esercizio 2.11.** Si considerino gli spazi vettoriali V e W sul corpo C con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$. Si verifichi dettagliatamente che la corrispondenza

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \operatorname{Hom}_C(V, W) \to M_{m\times n}(C)$$

che ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ associa la sua matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ rispetto alle basi date, è un isomorfismo di spazi vettoriali su C.

Si concluda che $\dim_C \operatorname{Hom}_C(V, W) = (\dim_C V)(\dim_C W)$. □

***Esercizio 2.12.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Siano U ed E due sottospazi di V di dimensioni k ed $n - k$ rispettivamente, tali che $V = U \oplus E$. Fissato comunque $\psi \in \operatorname{Hom}_C(U, E)$ si consideri il sottoinsieme di V

$$U_\psi = \{\, u + \psi(u) \mid u \in U \,\} .$$

(a) Si mostri che U_ψ è un sottospazio di V di dimensione k e che $V = U_\psi \oplus E$.

(b) Si mostri che la corrispondenza $\psi \mapsto U_\psi$ induce una biiezione tra $\operatorname{Hom}_C(U, E)$ e l'insieme S_E dei sottospazi X di V tali che $V = X \oplus E$. □

Esercizio 2.13. Siano U e W due spazi vettoriali di dimensioni r e k rispettivamente, e sia $\phi : U \to W$ un omomorfismo.

(a) Si mostri che $\Gamma_\phi = \{\, u + \phi(u) \in U \oplus W \mid u \in U \,\}$ (il *grafico* di ϕ) è un sottospazio di $U \oplus W$, di dimensione r e tale che $\Gamma_\phi \cap W = (0)$.
(b) Siano U e W due spazi vettoriali di basi $\{u_1, \dots, u_4\}$ e $\{w_1, \dots, w_3\}$, rispettivamente e sia

$$\Gamma = \langle 2u_1 + 3w_1 - w_3, 4u_2 + w_1 - 2w_2 + 4w_3, u_3 + 5w_1, u_4 + w_2 + 2w_3 \rangle \subset U \oplus W.$$

Si mostri che $\Gamma \cap W = (0)$ e si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'omomorfismo $\phi : U \to W$ che ha Γ come grafico. □

Esercizio 2.14. Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$ siano dati i vettori

$$w_1 = e_1 - e_3 + 2e_4, \quad w_2 = e_1 + e_2 - 2e_4, \quad w_3 = 3e_4 - e_1 - 2e_2 - e_3, \quad w_4 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ indica la base canonica.
(a) Si scriva, in tutti i modi possibili, il vettore $e_1 + e_2 - e_4$ come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_4$.
(b) Indicata con $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ l'applicazione lineare che manda la base canonica ordinatamente su $w_1, \dots, w_4$, si determinino una base del nucleo e dell'immagine di ϕ e di $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi$. □

Possiamo generalizzare il prodotto di una matrice $A \in M_{m\times n}(C)$ per una colonna $x \in C^n$ (cf. II.2.9) ad un prodotto tra matrici nel modo seguente.

2.10 Definizione. Siano date le matrici $A \in M_{m\times n}(C)$ e $B \in M_{n\times t}(C)$, il *prodotto righe per colonne* della matrice A con la matrice B è la matrice $AB \in M_{m\times t}(C)$, le cui colonne sono il prodotto della matrice A per le colonne della matrice B. Ovvero, se

$$A = (a_{hk})_{\substack{1\le h\le m\\ 1\le k\le n}}, \qquad B = (b_{rs})_{\substack{1\le r\le n\\ 1\le s\le t}}, \qquad AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le t}},$$

allora

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}, \qquad \text{qualunque siano } (i,j) \text{ con } 1 \le i \le m, 1 \le j \le t.$$

Esercizio 2.15. Si verifichi che il prodotto tra matrici definito sopra soddisfa alla proprietà associativa [$(AB)C = A(BC)$] e distribuisce rispetto alla somma di matrici [ovvero $(A+B)C = AC + BC$ e $A(D+E) = AD + AE$].

Al variare di k tra gli interi positivi, si indichi con $\mathbf{1}_k$ la matrice $\mathbf{1}_k = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{[simbolo di Kronecker]}$$

per $1 \le i, j \le k$. Si verifichi che, presa comunque una matrice $A \in M_{m\times n}(C)$, si ha $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$. □

Esercizio 2.16. Si considerino le matrici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e si verifichi che $AB \ne BA$. □

Esercizio 2.17. Sia $X \in M_{n\times n}(C)$ una matrice tale che $AX = XA$ per tutte le matrici $A \in M_{n\times n}(C)$. Si mostri che X è una matrice scalare, ovvero che esiste uno scalare $\alpha \in C$ tale che $X = \alpha\mathbf{1}_n$. □

Il prodotto tra matrici ha un preciso corrispettivo in termini di applicazioni lineari, ovvero il prodotto tra due matrici è la matrice della composizione delle due applicazioni lineari corrispondenti ai fattori.

Precisamente, dati tre spazi vettoriali U, V, W sul corpo C e le applicazioni lineari $\psi : U \to V$ e $\phi : V \to W$ e fissate delle basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_t\}$ di U, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Le matrici $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)$, $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ e $C = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi\circ\psi)$; sono legate dalla relazione $C = AB$, ovvero

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi\circ\psi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)\, \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi).} \tag{2.11}$$

Infatti, la matrice B ha come colonne le componenti dei vettori $\psi(u_1), \dots, \psi(u_t)$, rispetto alla base $\mathcal{V}$ di V e, moltiplicando la matrice A per queste colonne, si ottengono le componenti delle immagini tramite ϕ di questi vettori, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W; ovvero le componenti dei vettori $\phi(\psi(u_1)), \dots, \phi(\psi(u_t))$, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W, che sono esattamente le colonne della matrice dell'applicazione lineare composta $\phi\circ\psi$, rispetto alle basi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$.

Esercizio 2.18. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e sia $1_V : V \to V$ l'applicazione che manda ogni vettore in se stesso (la moltiplicazione per lo scalare 1). Si mostri che, qualunque sia la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si ha $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(1_V) = \mathbf{1}_n$. □

Esercizio 2.19. Si considerino in $V = \mathbb{R}^3$, la base canonica $\mathcal{E}$ e la base $\mathcal{U}$ costituita dai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si scrivano le *matrici di cambiamento di base* $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1_V)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1_V)$ e si calcolino i prodotti PQ e QP. □

Esercizio 2.20. Si considerino due basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ dello spazio vettoriale V sul corpo C e le matrici $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)$. Si verifichi che $PQ = \mathbf{1}_n = QP$. □

Esercizio 2.21. Si considerino due spazi vettoriali V e W sul corpo C ed un'applicazione lineare $\phi : V \to W$. Fissate delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ $\mathcal{W}' = \{w'_1, \dots, w'_m\}$ di W, si considerino le matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, $B = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\phi)$, $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(1_W)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(1_V)$. Si verifichi che $B = PAQ$. □

Esercizio 2.22. Una matrice $A \in M_{n\times n}(C)$ si dice *invertibile*, se esiste una matrice $B \in M_{n\times n}(C)$ tale che $AB = \mathbf{1}_n = BA$. In tal caso, si scrive A^{-1} in luogo di B. Si mostri che l'insieme delle matrici invertibili di $M_{n\times n}(C)$ è un *gruppo* rispetto all'operazione di prodotto. Ovvero che il prodotto di due matrici invertibili è ancora una matrice invertibile e che $\mathbf{1}_n$ si comporta da elemento neutro per il prodotto. Tale gruppo si indica con il simbolo $\mathrm{GL}_n(C)$ e si chiama *gruppo lineare* di ordine n. □

*Esercizio 2.23. Si mostri che una matrice $A \in M_{n\times n}(C)$ è invertibile se, e solo se, le sue colonne sono una base di C^n. □

*Esercizio 2.24. Sia $A \in M_{m\times n}(C)$.

(a) Si mostri che $\operatorname{rk} A = r$ se, e solo se, esistono due matrici invertibili $P \in \mathrm{GL}_m(C)$ e $Q \in \mathrm{GL}_n(C)$, tali che $PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

(b) Indicata con ${}^tA \in M_{n\times m}(C)$ la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne di A, si mostri che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^tA$. □

Esercizio 2.25. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si determinino (se esistono) tutte le matrici $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $AB = \mathbf{1}_2$.

(b) Si determinino (se esistono) tutte le matrici $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $CA = \mathbf{1}_3$. □

Esercizio 2.26. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$, si considerino i vettori

$$v_1 = -6e_2 + 2e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_3 = -e_1 - 2e_2 - e_3$$

e

$$w_1 = 2e_1, \quad w_2 = 2e_3, \quad w_3 = e_1 - 2e_3.$$

Si scrivano le matrici, rispetto alla base canonica, di tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che mandano ordinatamente v_i su w_i per $i = 1, 2, 3$. □

Esercizio 2.27. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V, con $U \cap W = (0)$.

(a) Si dimostri che un sottospazio $Z \subseteq U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione (lineare) $\psi : U \to W$ se, e solo se, $\dim Z = \dim U$ e $Z \cap W = (0)$.

(b) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{Q}^5$

$$U = L(e_3, e_1 + e_2, e_5 - 2e_4), \quad W = L(e_1 - e_2 + 2e_4, e_2 + e_5),$$
$$Z = L(2e_1 + 2e_2 + 2e_4 - e_5,\ e_2,\ e_3 + e_1).$$

Si verifichi che Z è il grafico di un'applicazione lineare $\psi : U \to W$ e si scriva la matrice di ψ rispetto alle basi date di U e W. □

*Esercizio 2.28. Siano V, W e Z tre spazi vettoriali sul corpo C, di dimensioni n, m e k, rispettivamente.

(a) Sia data un'applicazione lineare $\psi : W \to Z$, di rango r, e si consideri l'insieme

$$S = \{\ \phi \in \operatorname{Hom}_C(V, W) \mid \psi \circ \phi = 0\ \}.$$

Si mostri che S è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_C(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si supponga ora $C = \mathbb{R}$ ed $n = 3$, $m = 4$, $k = 2$, e si fissino delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$ degli spazi dati. Nell'ipotesi che ψ abbia matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si scriva una base di $S \subset M_{4\times3}(\mathbb{R})$. □

Esercizio 2.29. Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$. □

Esercizio 2.30. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ dotato della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, e sia H il sottospazio

$$H = \langle 2e_1 - e_2 - e_3 - 3e_4 + 2e_5, e_1 + 3e_2 + e_3, 2e_2 + 6e_4 - 4e_5 \rangle.$$

Posto $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e $W = \langle e_4, e_5 \rangle$, si mostri che H è il *grafico* di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ e si determinino il nucleo, l'immagine e la matrice di ϕ rispetto alle basi date. □

Esercizio 2.31. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $\phi_A : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, definita ponendo $\phi_A(X) = AX - XA$, al variare di $X \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che si tratta di un'applicazione lineare e si determinino, al variare di A in $M_2(\mathbb{Q})$, il nucleo e l'immagine di ϕ_A. □

Esercizio 2.32. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione del sottospazio

$$U = \{\ B \in M_3(\mathbb{R}) \mid ABC = \mathbf{0}\ \}$$

e si determini una base di U. □

Esercizio 2.33. Siano date due matrici $A \in M_{2\times2}(\mathbb{Q})$ e $B \in M_{3\times3}(\mathbb{Q})$ e si consideri l'applicazione $\tau : M_{2\times3}(\mathbb{Q}) \to M_{2\times3}(\mathbb{Q})$, definita da $\tau(X) = AXB$, per ogni $X \in M_{2\times3}(\mathbb{Q})$.

(a) Dopo aver osservato che τ è un'applicazione lineare, si mostri che τ è invertibile se, e solo se, entrambo le matrici A e B lo sono.

(b) Considerata la base canonica di $M_{2\times3}(\mathbb{Q})$, nell'ordine (lessicografico)

$$\varepsilon(11) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varepsilon(12) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varepsilon(13) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$
$$\varepsilon(21) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varepsilon(22) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \varepsilon(23) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

si scrivano gli elementi della matrice di τ rispetto a tale base, in termini degli elementi delle matrici A e B. □

2.12 Somme dirette, proiezioni e simmetrie. Sia V uno spazio vettoriale ed U, W, due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$ (cf. *Definizione II.1.8*). Dunque, ogni vettore $x \in V$ si scrive, in modo unico come somma, $x = u + w$, di un vettore $u \in U$ e di un vettore $w \in W$. A questa decomposizione possiamo associare alcune applicazioni lineari:

(a) $\pi_U : V \to V$, la *proiezione su* U*, parallelamente a* W, che manda $x \in V$ su quell'unico vettore $u \in U$, tale che $x - u \in W$.

(b) $\pi_W : V \to V$, l'analoga *proiezione su* W*, parallelamente ad* U, che manda $x \in V$ su quell'unico vettore $w \in W$, tale che $x - w \in U$.

(c) $\sigma_U : V \to V$, la *simmetria di asse* U *e direzione* W, che manda $x = u + w \in V$ su $\sigma_U(x) = u - w$.

(d) $\sigma_W : V \to V$, la *simmetria di asse* W *e direzione* U, che manda $x = u + w \in V$ su $\sigma_W(x) = -u + w$.

Esercizio 2.34. Siano V uno spazio vettoriale ed U, W, due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$.

(a) Indicata con π una qualunque delle due proiezioni associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\pi \circ \pi = \pi$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.

(b) Indicata con σ una qualunque delle due simmetrie associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\sigma \circ \sigma = 1$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\sigma(\sigma(x)) = x$.

(c) Si determinino nucleo ed immagine di π_U, π_W, σ_U e σ_W. Inoltre, per ciascuna delle applicazioni, si determini l'insieme dei vettori uniti. □

Esercizio 2.35. Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\phi \circ \phi = \phi$. Si mostri che ϕ è la proiezione su $\operatorname{im} \phi$, parallelamente a $\ker \phi$. □

Esercizio 2.36. Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\phi \circ \phi = 1$. Si mostri che le due applicazioni π_1 e π_2, definite ponendo $\pi_1(x) = \frac{1}{2}[x + \phi(x)]$ e $\pi_2(x) = \frac{1}{2}[x - \phi(x)]$ per ogni $x \in V$, sono due proiezioni e si ha $\pi_1 + \pi_2 = 1$, $\pi_1 - \pi_2 = \phi$. Si concluda che ϕ è una simmetria associata ad una decomposizione di V e si determini tale decomposizione. □

Esercizio 2.37. Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.

(b) Si determinino i sottospazi $U = \ker \pi$ e $W = \operatorname{im} \pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Si scriva la matrice della proiezione su U parallelamente a W.

(d) Si scriva la matrice della simmetria di asse U e direzione W. □

Esercizio 2.38. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Si scriva la matrice rispetto alla base canonica dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, che si ottiene proiettando i vettori di $\mathbb{R}^4$ su W, parallelamente al sottospazio U.

(c) Si determinino i vettori w_1' e w_2', simmetrici rispettivamente dei vettori w_1 e w_2 rispetto al piano $U^\perp$.

(d) Indicato con W' il sottospazio generato da w_1' e w_2', è vero o falso che (la restrizione di) π induce un'isometria tra W' e W? □

*Esercizio 2.39. [Spazio vettoriale quoziente] Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia W un suo sottospazio. Si chiama *classe laterale* del vettore $v \in V$ rispetto a W l'insieme $v + W = \{\, v + w \mid w \in W \,\}$[(†)].

(†) Nel linguaggio dello spazio affine $\mathbb{A}(V)$, associato allo spazio vettoriale V, la classe laterale $v + W$ altri non è che la sottovarietà lineare passante per v (pensato come *punto*) e parallela al sottospazio direttore W.

(a) Si verifichi che $v + W = \{ x \in V \mid x - v \in W \}$.
(b) Dati due vettori v, v' di V, si mostri che $v + W = v' + W$ oppure $(v + W) \cap (v' + W) = \emptyset$.
(c) Date due classi laterali $v + W$ e $v' + W$, la loro *somma* è la classe $(v + v') + W$. Si verifichi che la somma è indipendente dalla scelta dei rappresentanti v e v' delle due classi laterali.
(d) Data una classe laterale $v + W$ ed uno scalare $\alpha \in C$, il loro *prodotto* è la classe $(\alpha v) + W$. Si verifichi che il prodotto per scalari è indipendente dalla scelta del rappresentante v della classe laterale.
(e) Si indichi con V/W l'insieme delle classi laterali dei vettori di V rispetto a W. Si verifichi che V/W con le operazioni definite nei punti precedenti è uno spazio vettoriale su C, detto lo *Spazio vettoriale quoziente di V rispetto a W*.
(f) Si verifichi che l'applicazione naturale $\pi : V \to V/W$, definita ponendo $\pi(v) = v + W$, è un'applicazione lineare suriettiva. Tale applicazione è detta la *proiezione canonica* di V sul quoziente V/W. □

Esercizio 2.40. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un sottospazio di dimensione k. Data una base $v_1, \dots, v_k$ di W siano $v_{k+1}, \dots, v_n$ dei vettori che la completano ad una base di V. Nelle notazioni dell'esercizio precedente, si mostri che le classi laterali $v_{k+1} + W, \dots, v_n + W$ sono una base di V/W. Si concluda che $\dim V/W = \dim V - \dim W$. □

*Esercizio 2.41. Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Si mostri che l'applicazione $\phi_0 : V/\ker\phi \to W$, definita ponendo $\phi_0(v + \ker\phi) := \phi(v)$, è ben definita ed induce un isomorfismo di spazi vettoriali tra $V/\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$, tale da rendere commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "\pi"] & W \\ V/\ker\phi \arrow[r, "\phi_0"'] & \operatorname{im}\phi \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

ove π è la proiezione canonica (cf. `Esercizio II.2.39`) e j è l'inclusione naturale. □

Esercizio 2.42. Sia V uno spazio vettoriale su C e si considerino due sottospazi $U \subseteq W \subseteq V$. Si mostri che l'applicazione $\phi : V/U \to V/W$, definita ponendo $\phi(x + U) = x + W$, è un'applicazione lineare suriettiva che induce (cf. `Esercizio II.2.41`) un isomorfismo $\phi_0 : V/W \cong \frac{V/U}{W/U}$. □

Esercizio 2.43. Sia V uno spazio vettoriale su C e si considerino due sottospazi H, K di V e l'applicazione composta $\pi \circ j : K \to (H + K)/K$, ove $j : K \to H + K$ è l'inclusione naturale e $\pi : H + K \to (H + K)/K$ è la proiezione canonica. Si mostri che $\pi \circ j$ induce (cf. `Esercizio II.2.41`) un isomorfismo $\dfrac{H + K}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$. □

3. Sistemi di Equazioni lineari.

Iniziamo questa sezione richiamando alcune notazioni sui sistemi di equazioni lineari.

3.1 Definizione. Chiameremo *sistema di m equazioni lineari* nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti nel corpo C, ogni scrittura del tipo

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

ove i *coefficienti* a_{ij} ed i *termini noti* b_i, $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ sono elementi del corpo C.

Il sistema si dirà *omogeneo* se $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Dato un sistema Σ, si chiamerà *sistema omogeneo associato* il sistema che si ottiene da Σ sostituendo la colonna dei termini noti con una colonna di zeri.

Dato un sistema di m equazioni lineari Σ, nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti nel corpo C, possiamo considerare la *matrice dei coefficienti* A e la *colonna dei termini noti* b, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(C) \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Infine, considerando la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, possiamo scrivere il sistema nella forma $\Sigma : Ax = b$.

Possiamo quindi intepretare il problema di risolvere il sistema Σ nel linguaggio degli Spazi Vettoriali. In corrispondenza alla matrice $A \in M_{m\times n}(C)$, possiamo considerare l'unica applicazione lineare $\phi : C^n \to C^m$ che ha matrice A rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Dunque, dato un vettore $\xi \in C^n$, la sua immagine $\phi(\xi)$ ha coordinate $A\xi$ rispetto alla base canonica di C^m e quindi, risolvere il sistema lineare $\Sigma : Ax = b$, significa determinare i vettori di C^n, che vengono mandati su b da ϕ; ovvero la *controimmagine* di b tramite ϕ: $\phi^{-1}(b) = \{\, \xi \in C^n \mid \phi(\xi) = b \,\}$.

È facile descrivere la controimmagine di un vettore tramite un'applicazione lineare; dati un omomorfismo $\phi : C^n \to C^m$ ed un vettore $b \in C^m$, si ha

$$\phi^{-1}(b) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b \notin \operatorname{im}\phi \\ u_0 + \ker\phi = \{\, u_0 + z \mid z \in \ker\phi \,\} & \text{se } \phi(u_0) = b \end{cases} . \tag{3.2}$$

Infatti, è ovvio che non vi può essere controimmagine per un vettore che non appartenga all'immagine di ϕ. Inoltre, se $\phi(u_0) = b$ e $z \in \ker\phi$, allora $\phi(u_0 + z) = b$ e quindi $u_0 + \ker\phi \subseteq \phi^{-1}(b)$; e, d'altra parte, preso un qualunque vettore $v \in \phi^{-1}(b)$, si ha $\phi(v - u_0) = b - b = 0$ e quindi $v = u_0 + (v - u_0) \in u_0 + \ker\phi$, e si conclude che $\phi^{-1}(b) = u_0 + \ker\phi$.

Per quanto riguarda il problema di capire se un vettore stia o meno nell'immagine di un'applicazione lineare, possiamo fare la seguente

3.3 Osservazione. *Siano dati un'applicazione lineare $\phi : C^n \to C^m$, di matrice A rispetto alle basi canoniche dei due spazi, ed un vettore $b \in C^m$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*
(a) $b \in \operatorname{im}\phi$;
(b) *b è combinazione lineare delle colonne della matrice A;*
(c) $\operatorname{rk}(A|b) = \operatorname{rk} A$.

dim. $(a) \Rightarrow (b)$; Ricordiamo che $\operatorname{im}\phi = \langle \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) \rangle$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di C^n, e che le colonne della matrice A sono esattamente le coordinate dei vettori $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$, rispetto alla base canonica di C^m.

$(b) \Rightarrow (c)$; È chiaro che $\mathrm{rk}(A|b) \geq \mathrm{rk}\, A$, dato che tutte le colonne della seconda matrice sono anche colonne della prima. I due ranghi quindi coincidono se la colonna b è combinazione lineare delle colonne della matrice A.
$(c) \Rightarrow (a)$; Se i due ranghi sono uguali, il vettore b di C^m si scriverà come combinazione lineare delle colonne della matrice A, ovvero devono esistere delle costanti $\xi_1, \dots, \xi_n$ tali che $b = \xi_1\phi(e_1) + \cdots + \xi_n\phi(e_n) = \phi(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)$. **CVD** □

Mantenendo le notazioni sin qui introdotte, osserviamo che gli elementi di $\ker\phi$, altro non sono che i vettori $z \in C^n$ tali che $Az = 0$, ovvero tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo associato a $\Sigma : Ax = b$. Infine, se $\mathrm{rk}\,\phi = \mathrm{rk}\, A = r$, allora (cf. *Proposizione II.2.5*) la dimensione di $\ker\phi$ è uguale a $n - r$.

Possiamo quindi raccogliere tutte le osservazioni sin qui fatte in un unico enunciato.

3.4 Teorema. [Rouché-Capelli] *Il sistema di equazioni lineari $\Sigma : Ax = b$, con $A \in Mm \times n(C)$ e $b \in C^m$, ha soluzione se, e solo se,* $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}\, A$. *In tal caso, ogni soluzione del sistema Σ si ottiene sommando ad una soluzione particolare del sistema, ogni soluzione del sistema omogeneo associato Σ' : $Ax = 0$. Le soluzioni di Σ' formano uno spazio vettoriale di dimensione $n - \mathrm{rk}\, A$.*

Esercizio 3.1. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x & +2y & -\lambda z & = 0 \\ 2x & & -z & = 0 \\ -(\lambda+1)x & -\lambda y & +(\lambda+2)z & = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^3$. In caso contrario, si determini la dimensione del sottospazio generato da tale unione. □

Esercizio 3.2. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & & = 0 \\ (\lambda+1)x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2\lambda x_2 & -3x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune. □

Esercizio 3.3. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x_1 & +2x_2 & -\lambda x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -(\lambda+1)x_1 & -\lambda x_2 & +(\lambda+2)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +(\lambda-2)x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^4$. In caso contrario, si determinino le equazioni del sottospazio generato da tale unione. □

Esercizio 3.4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le terne di piani

$$\pi_1(\lambda) : y - \lambda x + (\lambda-2)(z+1) = 0, \quad \pi_2(\lambda) : (\lambda-1)x + \lambda z = 2, \quad \pi_3(\lambda) : x + \lambda y + 2\lambda^2 z = 0,$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.

Si dica per quali valori di λ le intersezioni $\pi_1(\lambda) \cap \pi_2(\lambda)$, $\pi_1(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$, $\pi_2(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$ sono tre rette parallele, a due a due, distinte. □

3.5 La tecnica di Eliminazione. [Gauss] Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari consiste nella cosiddetta "tecnica di eliminazione", tradizionalmente attribuita a Gauss.

La tecnica consiste nel fare "operazioni elementari" sulle equazioni di un sistema lineare in modo da ridurre il numero di coefficienti non nulli senza modificarne le soluzioni. Queste cosiddette *operazioni elementari* sono di tre tipi:

- scambio di due equazioni in un sistema lineare (e quindi di due righe nella corrispondente matrice);
- moltiplicazione di tutti i coefficienti di un'equazione (e quindi di una riga della corrispondente matrice) per una costante diversa da zero;
- sostituzione di un'equazione con la somma della stessa con un multiplo dell'equazione che la precede (e quindi sostituire una riga della corrispondente matrice con la somma della riga stessa con un multiplo della riga soprastante).

Iterando opportunamente queste operazioni si può ottenere un sistema lineare che abbia le stesse soluzioni del sistema di partenza, ma con un maggior numero di coefficienti uguali a zero e quindi un sistema per cui sia più facile scrivere le soluzioni. Prima di utilizzare il linguaggio dell'algebra lineare per spiegare la validità di questa tecnica, diamo un esempio esplicito della sua applicazione alla risoluzione di un sistema lineare.

Vogliamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

e quindi applichiamo operazioni elementari in modo che la variabile x_1 non compaia nelle equazioni successive alla prima, x_2 non compaia nelle equazioni successive alla seconda, ecc. Poichè x_1 non compare nella prima equazione, scambiamo tra loro le prime due righe.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 & \text{(II)} \\ x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 & \text{(I)} \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}.$$

Modifichiamo quindi il sistema, scrivendo a destra delle equazioni le operazioni fatte sulle righe del sistema precedente, indicando ogni riga con il numero romano ad essa corrispondente. Ora sostituiamo alla terza equazione la sua somma con la prima e poi sostituiamo la quarta equazione con la sua differenza con la prima.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 & \text{(III+I)} \\ x_2 - x_4 + x_5 = 1 & \text{(IV-I)} \end{cases}.$$

In questo modo abbiamo 'eliminato' x_1 dalle equazioni successive alla prima. Operiamo analogamente con la seconda equazione e la variabile x_2, ovvero:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = 0 & \text{-(III-II)} \\ x_4 - x_5 = 1 & \text{(IV-II)} \end{cases}.$$

Si osservi che nella terza riga abbiamo effettuato due operazioni elementari, perchè, dopo aver sottratto le due righe abbiamo moltiplicato l'equazione che ne risultava per la costante -1. Il sistema ottenuto in questo modo non richiede altre operazioni elementari perchè la variabile x_3 è già assente dalla quarta equazione.

A questo punto è immediato osservare che quest'ultimo sistema ha rango 4 e che le sue soluzioni sono[†]

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Queste sono anche soluzioni del sistema di partenza, come si può verificare andandole a sostituire in quel sistema. In realtà sono *le* soluzioni del sistema di partenza, perchè *due sistemi ottenuti l'uno dall'altro con il procedimento di eliminazione hanno le stesse soluzioni*. Useremo il linguaggio dell'algebra lineare per spiegare questo fatto (e quindi la validità del metodo di Gauss).

Sappiamo che risolvere il sistema (II.3.6)significa trovare la controimmagine del vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ rispetto all'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Le *operazioni elementari che applichiamo alle righe del sistema corrispondono a cambiamenti di base nello spazio* $\mathbb{R}^4$ e quindi i sistemi che otteniamo in questo modo hanno la matrice di ϕ e le coordinate del vettore w rispetto a questa nuova base. Trattandosi della stessa applicazione lineare e dello stesso vettore, non cambia certo la sua controimmagine e quindi non cambiano le soluzioni.

Scriviamo quindi ordinatamente le matrici dei cambiamenti di base operati in $\mathbb{R}^4$ durante la risoluzione del sistema, facendoli agire *dopo* l'omomorfismo ϕ, e quindi operando *a sinistra* della matrice di ϕ. Si ha quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ove B è la matrice dell'ultimo sistema ed è immediato verificare che le tre matrici che moltiplicano A sono tutte di rango massimo e quindi matrici di cambiamento di base. Invitiamo il lettore a verificare che, moltiplicando le stesse tre matrici nell'ordine per il vettore w, si ottiene la colonna dei termini noti del sistema finale, ovvero $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$[†]. Il lettore più scrupoloso, può verificare che le basi di $\mathbb{R}^4$ sono,

---

[†] Volendo, si poteva continuare ulteriormente il procedimento di eliminazione ed ottenere il sistema

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +7x_5 = -1 & \text{(I+3III-II)} \\ \quad x_2 \qquad\qquad\; = 2 & \text{(II+2IV)} \\ \qquad x_3 \quad +2x_5 = 0 & \\ \qquad\quad x_4 \; -x_5 = 1 & \end{cases}.$$

le cui soluzioni sono evidentemente quelle scritte.

[†] La continuazione del procedimento di eliminazione fatta nella nota precedente corrisponde a moltiplicare la matrice B a sinistra per la matrice di cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed operare analogamente con la colonna dei termini noti.

ordinatamente: $\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$, $\{e_2 - e_3 + e_4, e_1, e_3, e_4\}$, $\mathcal{V} = \{e_2 - e_3 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, -e_3, e_4\}$; e quindi $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\phi)$.

Riepilogando quanto detto, il metodo di eliminazione di Gauss, consiste nell'applicare operazioni elementari sulle righe di un sistema lineare, fino ad ottenere un sistema che abbia una *matrice a scalini*, ovvero una matrice A tale che, per ogni indice di riga i, esista un indice di colonna $j \geq i$, tale che si abbia $a_{hk} = 0$ quando $h \geq i$ e $k < j$ (cioè tutte le righe successive alla i-esima hanno le prime entrate nulle fino alla j-esima colonna). Il sistema così ottenuto ha le stesse soluzioni del sistema di partenza.

Concludiamo la discussione dando un altro esempio di risoluzione di un sistema lineare con la tecnica di eliminazione di Gauss. Vogliamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 +4x_4-x_5= 4 \\ x_1 -x_3+2x_4-x_5= 1 \\ x_2+2x_3 +x_4 = 2 \\ x_1+x_2 +x_3+3x_4-x_5= 3 \end{cases}$$

e quindi applichiamo operazioni elementari che, come nell'esempio precedente indichiamo a destra del sistema.

$$\begin{cases} x_1 -x_3+2x_4-x_5= 1 & (II) \\ x_2+2x_3 +x_4 = 2 & (III) \\ 2x_1+x_2 +4x_4-x_5= 4 & (I) \\ x_1+x_2 +x_3+3x_4-x_5= 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 -x_3+2x_4-x_5= 1 \\ x_2+2x_3 +x_4 = 2 \\ +x_2+2x_3 +x_5= 2 & (III-2I) \\ x_2+2x_3 +x_4 = 2 & (IV-I) \end{cases}.$$

In questo modo abbiamo eliminato x_1 dalle equazioni successive alla prima e possiamo operare analogamente con la variabile x_2, ed ottenere

$$\begin{cases} x_1 -x_3+2x_4-x_5= 1 \\ x_2+2x_3 +x_4 = 2 \\ x_4-x_5= 0 & -(III-II) \\ 0= 0 & (IV-II) \end{cases}$$

che è già un sistema con la matrice a scalini. A questo punto possiamo concludere che il sistema ha rango 3 e che le sue soluzioni sono la varietà lineare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ovvero un piano nello spazio affine di dimensione 5. Il lettore più attento è invitato a scrivere esplicitamente le matrici dei cambiamenti di base coinvolti nella risoluzione del sistema.

Esercizio 3.5. Si chiamano *matrici elementari* le matrici dei cambiamenti di base corrispondenti alle operazioni elementari della tecnica di eliminazione; ovvero una matrice quadrata X è una matrice elementare se, moltiplicata *a sinistra* della matrice completa di un sistema, produce un'operazione elementare sulle *righe* del sistema.

(a) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che scambia tra loro le righe i e j di un sistema, con $1 \leq i < j \leq n$ è la matrice $H(i,j) = \mathbf{1}_n + \varepsilon(ij) + \varepsilon(ji) - \varepsilon(ii) - \varepsilon(jj)$, ove $\{\, \varepsilon(hk) \mid 1 \leq h, k \leq n \,\}$, è la base canonica di $M_{n\times n}(C)$ (cf. *Definizione II.2.6*).

(b) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che moltiplica l'i-esima riga di un sistema per lo scalare $\beta \neq 0$ è la matrice $C(i,\beta) = \mathbf{1}_n + (\beta - 1)\varepsilon(ii)$.

(c) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che somma all'i-esima riga di un sistema la j-esima riga moltiplicata per lo scalare $\alpha \neq 0$ è la matrice $E(i,j,\alpha) = \mathbf{1}_n + \alpha\varepsilon(ij)$. □

Esercizio 3.6. Sia B una matrice $m \times n$. Si descriva l'effetto che si ottiene su B, moltiplicando B *a destra* per le matrici elementari descritte nell'esercizio precedente. □

⋆Esercizio 3.7. Si verifichi che le matrici elementari sono tutte invertibili e che ogni matrice invertibile, ad elementi in un corpo C, è prodotto di un numero finito di matrici elementari. □

Esercizio 3.8. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 = 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune. □

Esercizio 3.9. Al variare di t in $\mathbb{Q}$, si scrivano tutte le matrici X tali che $AXB = A$, ove $A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.10. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *riga-equivalenti* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = PA$. Analogamente, due sistemi di equazioni lineari si dicono *riga-equivalenti* se lo sono le loro matrici complete.

(a) Si verifichi che due sistemi lineari riga-equivalenti hanno lo stesso insieme di soluzioni.

(b) È vero o falso che due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ sono riga-equivalenti se, e solo se, i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso insieme di soluzioni?

(c) È vero o falso che due sistemi non-omogenei di equazioni lineari, $AX = c$ e $BX = d$, sono riga-equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso insieme di soluzioni? □

Esercizio 3.11. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *equivalenti* se esistono delle matrici invertibili $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ e $Q \in \mathrm{GL}_m(C)$ tali che $B = PAQ$.

(a) Si mostri che una matrice $A \in M_{n\times m}(C)$ ha rango r se, e solo se, A è equivalente ad una matrice (a blocchi) del tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ove $r = \mathrm{rk}\, A$.

(b) Data una matrice $A \in M_{n\times m}(C)$, la sua *trasposta* è la matrice ${}^tA \in M_{m\times n}(C)$, che si ottiene scambiando tra loro righe e colonne; ovvero l'elemento di posto (i, j) di ${}^tA$ è l'elemento di posto (j, i) di A. Si deduca dal punto precedente che A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango. □

Esercizio 3.12. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che l'insieme delle matrici $X \in M_2(\mathbb{Q})$ tali che $AX = XA$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$, la cui dimensione è uguale a 2 oppure a 4, e quest'ultimo caso accade se, e solo se, A è una matrice scalare ($a = d$ e $b = c = 0$). □

Esercizio 3.13. Al variare di λ in $\mathbb{Q}$, si dica quante soluzioni vi sono in $\mathbb{Q}^4$ per il seguente sistema di equazioni lineari

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda+1)x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda-1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

□

Esercizio 3.14. Si determinino i valori del parametro t per cui il sistema

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases}$$

ha soluzione.

Per i valori di t per cui il sistema ammette un'unica soluzione, si determini tale soluzione in funzione del parametro t. □

Esercizio 3.15. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si determini l'insieme $\mathscr{D} = \{\, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid AB = A \,\}$. Posto $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, si mostri che $\mathscr{D}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(V)$ e se ne determini la dimensione. □

Esercizio 3.16. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e si considerino le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W. Siano date inoltre, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi_{(a,b)} : V \to W$, definite dalle condizioni

$$\phi(v_1 + v_2) = w_1, \qquad \phi(v_3) = w_1 + w_2, \qquad \phi(v_1 + v_3) = 3w_2;$$
$$\psi_{(a,b)}(v_2) = 2w_1 - 2w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(2v_1) = -2w_1 + 4w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(3v_1 + 3v_2 + 3v_3) = aw_1 + bw_2.$$

(a) Si scriva la matrice di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.
(b) Si mostri che $\mathbb{L} = \left\{ \psi_{(a,b)} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W))$, se ne calcoli la dimensione, e si dica se $\phi \in \mathbb{L}$. □

Esercizio 3.17. Ricordiamo che si chiama *quadrato magico* ogni matrice quadrata ad elementi interi (positivi) in cui la somma degli elementi di ciascuna riga è uguale alla somma degli elementi di ciascuna colonna ed è anche uguale alla somma degli elementi posti su ciascuna delle due diagonali.
(a) Si mostri che gli unici quadrati magici di ordine 2 sono banali, ovvero hanno tutte le entrate uguali.
(b) Si determinino i quadrati magici di ordine 3. □

Esercizio 3.18. Siano V, W e Z tre spazi vettoriali sul corpo C, di dimensioni n, m e k, rispettivamente.
(a) Sia data un'applicazione lineare $\psi : W \to Z$, di rango r, e si consideri l'insieme

$$S = \{\, \phi \in \mathrm{Hom}_C(V,W) \mid \psi \circ \phi = 0 \,\}.$$

Si mostri che S è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V,W)$ e se ne calcoli la dimensione.
(b) Si supponga ora $C = \mathbb{R}$ ed $n = 3$, $m = 4$, $k = 2$, e si fissino delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$ degli spazi dati. Nell'ipotesi che ψ abbia matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si scriva una base di $S \subset M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. □

Esercizio 3.19. Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$. □

Esercizio 3.20. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione del sottospazio

$$U = \{\, B \in M_3(\mathbb{R}) \mid ABC = \mathbf{0} \,\}$$

e si determini una base di U. □

Esercizio 3.21. Si considerino le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\psi = \phi \circ f$, ovvero tale da rendere commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathbb{R}^4 \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

(b) Si scrivano le matrici rispetto alle basi canoniche di tutte le applicazioni f (se esistono) soddisfacenti alla condizione del punto (a). □

Esercizio 3.22. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le dimensioni dei sottospazi

$$R = \{\, X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = \mathbf{0} \,\} \qquad \text{ed} \qquad L = \{\, Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid YA = \mathbf{0} \,\}$$

e si scriva una base per ciascuno di tali sottospazi. □

3.7 Spazi Affini. Per il lettore più esigente diamo una definizione astratta di Spazio Affine che precisa qunto detto nel Capitolo I sullo spazio $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ e lo situa in un ambito un po' più generale. Uno *Spazio Affine* è costituito da un insieme, $\mathbb{A}$, di *punti*, da uno spazio vettoriale, V, e da un'applicazione $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$, che manda la coppia (P, v) sul punto $P + v$, e soddisfa alle seguenti proprietà:

- $(P + v) + w = P + (v + w)$ per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v, w \in V$;
- $P + v = P \Leftrightarrow v = 0$, qualunque sia $P \in \mathbb{A}$;
- presi comunque P e Q in $\mathbb{A}$, esiste un (unico) vettore $v \in V$ tale che $Q = P + v$.

Il vettore v, descritto nell'ultima proprietà, è usualmente indicato come $Q - P$, o $\overrightarrow{PQ}$, e l'operazione di "differenza tra punti" così definita è compatibile con le operazioni tra vettori e tra punti e vettori.

Osserviamo inoltre che, fissato un punto P, resta definita un'applicazione $\alpha_P : V \to \mathbb{A}$, definita da $\alpha_P(v) = P + v$, che è una biezione, avendo come inversa $\beta_P : \mathbb{A} \to V$, definita da $\beta(Q) = Q - P$. Infine, per ogni vettore $v \in V$, è ben definita la *traslazione* $\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, che manda P in $P + v$.

Dati due spazi affini, $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$, si definisce un'*applicazione affine* come un'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, per cui esista un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che $f(P + v) = f(P) +' \phi(v)$, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ ed ogni vettore $v \in V$. Le applicazioni affini $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, che siano biiezioni di $\mathbb{A}$ in sé, sono dette *affinità*.

Nelle notazioni precedenti, possiamo quindi scrivere che $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $f = \alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P$, qualunque sia $P \in \mathbb{A}$. Viceversa, è facile verificare (Esercizio!) che, dati due punti P e Q di $\mathbb{A}$ ed un'applicazione lineare $\psi : V \to V$, l'applicazione composta $\alpha_Q \circ \psi \circ \beta_P$ è un'applicazione affine, che manda P su Q ed è associata all'applicazione lineare ψ.

Dato uno spazio vettoriale V, gli si può associare uno Spazio affine $\mathbb{A}(V)$, prendendo gli elementi di V sia come *punti* che come *vettori* ed utilizzando come operazione la somma dello spazio vettoriale. La differenza sostanziale tra V ed $\mathbb{A}(V)$ è che nel primo l'origine è posta nel vettore nullo che resta invariato per ogni trasformazione lineare dello spazio, mentre nello Spazio Affine l'origine può essere posta arbitrariamente su qualsiasi punto e venir trasformata in altri punti dalle applicazioni affini, perchè alle applicazioni lineari si sono aggiunte le traslazioni come possibili trasformazioni dello spazio.

Fissato un *riferimento* in uno spazio affine, ovvero fissati un'origine $O \in \mathbb{A}$ ed una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, possiamo associare ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ le coordinate del vettore $P - O = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ ed aggiungere un'ulteriore coordinata uguale ad 1 per ricordare che si tratta di un punto, scriveremo cioè $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, mentre scriveremo $v = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, per indicare il vettore $v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$. In questo modo le operazioni tra gli elementi dello spazio affine si trasformano nelle naturali operazioni tra le coordinate. Inoltre, ad ogni applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, possiamo associare una matrice (quadrata di ordine $n+1$): posto $t = f(O) - O$, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, si ha $f(P) = f(O + (P - O)) = O + t + \phi(P - O)$, e quindi le coordinate del punto $f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sono completamente determinate a partire dalle coordinate di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dalla conoscenza della matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e dalla conoscenza delle coordinate del vettore $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Date due applicazioni affini f ed f', di $\mathbb{A}$ in sé, associate rispettivamente ai vettori $t = f(O) - O$ e $t' = f'(O) - O$ ed alle applicazioni lineari ϕ e ϕ', lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente il vettore $t'' = f'(f(O)) - O$ e l'applicazione lineare ϕ'' associati all'applicazione composta $f' \circ f$, e di verificare che la matrice dell'applicazione composta corrisponde al prodotto delle matrici delle applicazioni componenti.

Il lettore diligente è invitato anche a scrivere la matrice di un'applicazione affine tra due spazi affini diversi, rispetto a dei fissati riferimenti su tali spazi.

Esercizio 3.23. Siano date due matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e si consideri l'insieme $L = \{\, X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX = B \,\}$. Si mostri che L è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione in funzione del rango della matrice A.

Si scrivano esplicitamente gli elementi di L nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3.24. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Si mostri che l'insieme $L = \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) \mid XA = B \,\}$ è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_n(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione, al variare di A e B.

Si scrivano esplicitamente gli elementi di L nel caso in cui $n = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3.25. Unendo il cloro (Cl_2) all'idrossido di potassio (KOH), si ottengono cloruro di potassio (KCl), clorato di potassio ($KClO_3$) e acqua (H_2O). Bilanciare la reazione

$$Cl_2 + KOH \to KCl + KClO_3 + H_2O;$$

ovvero trovare dei numeri naturali $n_1, \dots, n_5$ tali che il numero di atomi di ciascun elemento nel termine di sinistra $n_1Cl_2 + n_2KOH$ sia uguale al numero di atomi di ciascun elemento presente nel termine di destra $n_3KCl + n_4KClO_3 + n_5H_2O$. □

Esercizio 3.26. Siano dati tre spazi vettoriali V, W, Z, di dimensione finita sul campo C, e due applicazioni lineari $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$. Si mostri che

(a) $\mathrm{rk}(\psi \circ \phi) = \mathrm{rk}\,\phi$ se, e solo se, $\ker\psi \cap \mathrm{im}\,\phi = \langle 0 \rangle$;

(b) $\mathrm{rk}(\psi \circ \phi) = \mathrm{rk}\,\psi$ se, e solo se, $\ker\psi + \mathrm{im}\,\phi = W$.

(c) Si concluda che, dato un endomorfismo $f : V \to V$, si ha $\mathrm{rk}(f \circ f) = \mathrm{rk}\,f$ se, e solo se, $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\,f$. □